1 EXERCICE : Calcul de quelques transformées en Z

A COMPLETER ($\star$ doit être su avant le TD)

1.1 $\star$ Définition de la transformée en Z

Soit $\{s_n\}$ une séquence, alors on définit la transformée en Z de $\{s_n\}$ par :
$S(z) = \mathcal{Z}\{s_n\} =$

1.2 $\star$ Théorème de l'avance

Si $S(z) = \mathcal{Z}\{s_n\}$, alors $Z(s_{n+k}) =$

1.3 $\star$ Théorème de la dérivation

Si $S(z) = \mathcal{Z}\{s_n\}$, alors $Z(ns_n) =$

1.4 Déterminer les transformée en Z des séquences suivantes

a) Impulsion unité : $\delta_n = \begin{cases} 1, \text{ lorsque } n = 0 \\ 0, \text{ lorsque } n \neq 0 \end{cases}$

b) Echelon unité : $u_n = \begin{cases} 1, \text{ lorsque } n \geq 0 \\ 0, \text{ lorsque } n < 0 \end{cases}$

c) Rampe : $r_n = nu_n$
   - En utilisant le théorème de l'avance : $\mathcal{Z}\{r_{n+1} - r_n\} = \mathcal{Z}\{u_n\}$
   - En utilisant le théorème de la dérivation

d) Parabole : $p_n = n^2 u_n = nr_n$

e) Séquence exponentielle : $s_n = \begin{cases} a^n, \text{ lorsque } n \geq 0 \\ 0, \text{ lorsque } n < 0 \end{cases}$

f) $s_n = na^n u_n$ (Théorème de la dérivation)

g) Sinus et cosinus dans une enveloppe exponentielle :
   - Commencer par déduire la la transformée en Z de la séquence $v_n = Ap_n e^{j(n\theta+\phi)}$
   - En déduire les transformées en Z des deux séquences suivantes (parties réelle et imaginaire de v_n) : $c_n = Ap^n cos(n\theta + \phi)$ et $s_n = Ap^n sin(n\theta + \phi)$

2 EXERCICE : détermination et utilisation de la fonction de transfert

A COMPLETER ($\star$ doit être su avant le TD) : la fonction de transfert d'un système d'entrée e_n et de sortie s_n est définie comme le rapport ...

$\star$ On peut la considérer comme une autre représentation, plus facile à manipuler, de l'équation récurrente. Pour la calculer depuis l'équation récurrente, on applique le théorème de l'avance, ou du retard, à conditions initiales nulles.

2.1 Pour les 2 systèmes discrets (ensemble d'équations récurrentes) suivants :

a) Déterminer la transformée en Z (à CI=0) de chaque équation récurrente,

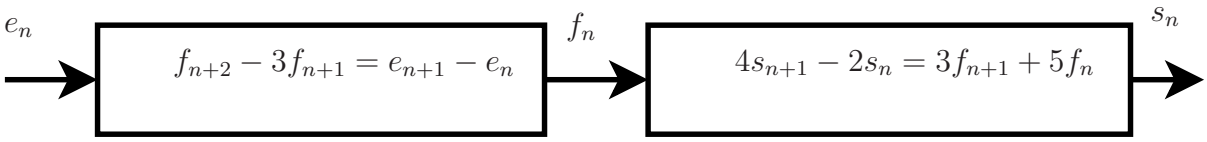
b) En déduire une représentation sous forme de schéma fonctionnel de chaque équation récurrente (boîtes contenant des fonctions de transfert, additionneurs)

c) En raisonnant sur le schéma fonctionnel global, déterminer la fonction de transfert entre l'entrée $E(z)$ et la sortie $S(z)$ du schéma global

d) En déduire l'équation récurrente décrivant la dynamique entrée-sortie du système, sous la forme :

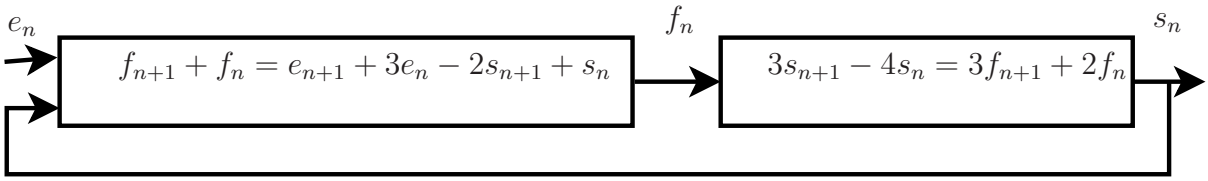
$$s_n = f(s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots)$$

Système discret 1 :



Solution : $s_n = \frac{3}{4}e_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-2} - \frac{5}{4}e_{n-3} + \frac{14}{4}s_{n-1} - \frac{6}{4}s_{n-2}$

Système discret 2 :



Solution : $s_n = \dfrac{3e_n - 11e_{n-1} + 6e_{n-2} + 6s_{n-2}}{9}$

2.2 Equation récurrente

a) Déterminer analytiquement l'expression de l'original s_n de $S(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)(z-2)}$.

b) Déterminer numériquement l'expression de l'original s_n de $S(z)$ au moyen du logiciel Matlab/octave, et vérifier que les premiers échantillons sont cohérents avec votre résultat analytique (fonctions residue,impz).

3 EXERCICE : Résolution d'équations récurrentes

A COMPLETER ($\star$ doit être su avant le TD)

$\star$ Théorème de l'avance : soit une séquence $\{s_n\}$, et sa transformée en z : $S(z) = \mathcal{Z}\{s_n\}$, La transformée en Z de la séquence avancée de k échantillons, s'écrit, en fonction de $S(z)$ et des conditions initiales s_0 ,s_1, s_{k-1} :

— $\mathcal{Z}\{s_{n+k}\} =$

(à conditions initiales non nulles !...) en particulier, on a

— $\mathcal{Z}\{s_{n+1}\} =$
(à conditions initiales non nulles !...)

— $\mathcal{Z}\{s_{n+2}\} =$
(à conditions initiales non nulles !...)

3.1 Résoudre analytiquement les équations récurrentes suivantes

a) $s_n - 2s_{n-1} = 0$, $n \geq 0$, avec $s_0 = 1$

b) $s_n - 2s_{n-1} = 1$, $n \geq 0$, avec $s_0 = 1$

Vérifier les résultats avec un outil CAO.

4 EXERCICE : analyse de la dynamique de systèmes discrets (stabilité et réponse fréquentielle au moyen de la transformée bilinéaire, théorème de la valeur finale)

A COMPLETER ($\star$ doit être su avant le TD)

— $\star$ un système discret est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert Fz(z) sont tous...

— $\star$ soit une séquence s_n, alors la valeur finale de s_n, si elle existe, est donnée à partir de sa transformée en Z, $S(z)$, par :

— $\star$ La réponse fréquentielle d'un système discret de fonction de transfert $Fz(z)$ à la pulsation réelle ω, est donnée par le module et l'argument de $F(z)$, évaluée en $z =$

4.1 Pour chacune des fonctions ci-après, la période d'échantillonnage est de $T_e = 0,1s$

a) Un filtre passe-haut de gain unitaire (en hautes fréquences), d'ordre 1 et de pulsation de coupure (à $-3dB$) $\omega_c = 0,51\, rad/s$.

b) Un filtre passe-bas de gain statique unitaire, d'ordre 1 et de pulsation de coupure (à $-3dB$) $\omega_c = 0,1005\, rad/s$.

c) Un contrôleur type avance de phase avec de pulsations transitionnelles $\omega_b = 0,01\, rad/s$ et $\omega_h = 0,1\, rad/s$.

d) Un contrôleur type proportionnel-intégrateur de gain (en hautes fréquences) 3,6 et de pulsation transitionnelle $\omega_i = 2,21\, rad/s$.

1. Déterminer la fonction de transfert $F(p)$ correspondante.
2. Tracer les diagrammes de bode asymptotiques $F(j\omega)$
3. Vérifier les pôles de la function de transfert $F(p)$ et conclure quant à la stabilité

4. Déterminer (par la transformation de Tustin) la fonction de transfert $F(z)$ correspondante.
5. Vérifier la cohérence des expressions $F(z)$ et $F(j\omega)$

$$\begin{cases} \omega \to 0 \Leftrightarrow z \to \underbrace{[\quad]}_{\text{à completer}} \\ \omega \to \infty \Leftrightarrow z \to \underbrace{[\quad]}_{\text{à completer}} \\ z \to 0 \Leftrightarrow w \to \underbrace{[\quad]}_{\text{à completer}} \\ z \to \infty \Leftrightarrow z \to \underbrace{[\quad]}_{\text{à completer}} \end{cases}$$

6. Vérifier les pôles de la function de transfert $F(z)$ et conclure quant à la stabilité.
7. Déterminer l'équation récurrente (sous forme programmable) f_n correspondante.
8. Déterminer la valeur finale de la sortie ($\lim_{n\to\infty} s_n$), lorsque l'entrée est un échelon unité, au moyen du théorème de la valeur finale (lorsque les conditions d'application du théorème de la valeur finale sont vérifiées).